

2ª Fase Exame Discursivo



05/12/2010

MATEMÁTICA

Caderno de prova

Este caderno, com dezesseis páginas numeradas sequencialmente, contém dez questões de Matemática.

Não abra o caderno antes de receber autorização.

Instruções

1. Verifique se você recebeu mais dois cadernos de prova.
2. Verifique se seu nome, seu número de inscrição e seu número do documento de identidade estão corretos nas sobrecapas dos três cadernos.

Se houver algum erro, notifique o fiscal.

3. Destaque, das sobrecapas, os comprovantes que têm seu nome e leve-os com você.
4. Ao receber autorização para abrir os cadernos, verifique se a impressão, a paginação e a numeração das questões estão corretas.

Se houver algum erro, notifique o fiscal.

5. Todas as respostas e o desenvolvimento das soluções, quando necessário, deverão ser apresentados nos espaços apropriados, com caneta azul ou preta.

Não serão consideradas as questões respondidas fora desses locais.

Informações gerais

O tempo disponível para fazer as provas é de cinco horas. Nada mais poderá ser registrado após o término desse prazo.

Ao terminar, entregue **os três cadernos** ao fiscal.

Nas salas de prova, não será permitido aos candidatos portar arma de fogo, fumar, usar relógio digital ou boné de qualquer tipo, bem como utilizar corretores ortográficos líquidos ou similares.

Será eliminado do Vestibular Estadual 2011 o candidato que, durante as provas, utilizar qualquer meio de obtenção de informações, eletrônicos ou não, tais como calculadoras, agendas, computadores, rádios, telefones, receptores, anotações manuscritas ou impressas e livros.

Será também eliminado o candidato que se ausentar da sala levando consigo qualquer material de prova.

Boa prova!





01

Um supermercado realiza uma promoção com o objetivo de diminuir o consumo de sacolas plásticas: o cliente que não utilizar as sacolas disponíveis no mercado terá um desconto de R\$0,03 a cada cinco itens registrados no caixa.

Um participante dessa promoção comprou 215 itens e pagou R\$155,00.

Determine o valor, em reais, que esse cliente pagaria se fizesse as mesmas compras e não participasse da promoção.

Desenvolvimento e resposta:

02

Um trem transportava, em um de seus vagões, um número inicial n de passageiros. Ao parar em uma estação, 20% desses passageiros desembarcaram. Em seguida, entraram nesse vagão 20% da quantidade de passageiros que nele permaneceu após o desembarque. Dessa forma, o número final de passageiros no vagão corresponde a 120.

Determine o valor de n .

Desenvolvimento e resposta:

03

Considere a equação:

$$(\log_2 x)^2 - \log_{\sqrt[3]{2}} x = 0 \quad \text{com } x > 0$$

Um aluno apresentou o seguinte desenvolvimento para a solução dessa equação:

$$\begin{aligned}(\log_2 x)^2 &= \log_{\sqrt[3]{2}} x \\(\log_2 x)^2 &= 3(\log_2 x) \\(\log_2 x) &= 3 \\x &= 2^3 \\x &= 8 \\S &= \{8\}\end{aligned}$$

O conjunto-solução encontrado pelo aluno está incompleto.

Resolva a equação e determine corretamente o seu conjunto-solução.

Desenvolvimento e resposta:

04

Um jogo com dois participantes, A e B, obedece às seguintes regras:

- antes de A jogar uma moeda para o alto, B deve adivinhar a face que, ao cair, ficará voltada para cima, dizendo "cara" ou "coroa";
- quando B errar pela primeira vez, deverá escrever, em uma folha de papel, a sigla UERJ uma única vez; ao errar pela segunda vez, escreverá UERJUERJ, e assim sucessivamente;
- em seu n ésimo erro, B escreverá n vezes a mesma sigla.

Veja o quadro que ilustra o jogo:

| Ordem de erro | Letras escritas |
|----------------|-------------------------|
| 1 ^o | UERJ |
| 2 ^o | UERJUERJ |
| 3 ^o | UERJUERJUERJ |
| 4 ^o | UERJUERJUERJUERJ |
| · | · |
| · | · |
| · | · |
| n^o | UERJUERJUERJUERJ...UERJ |

O jogo terminará quando o número total de letras escritas por B, do primeiro ao n ésimo erro, for igual a dez vezes o número de letras escritas, considerando apenas o n ésimo erro.

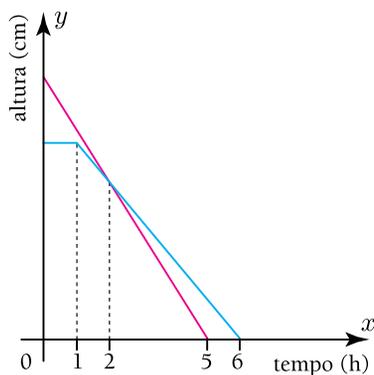
Determine o número total de letras que foram escritas até o final do jogo.

Desenvolvimento e resposta:

05

Em um determinado dia, duas velas foram acesas: a vela A às 15 horas e a vela B, 2 cm menor, às 16 horas. Às 17 horas desse mesmo dia, ambas tinham a mesma altura.

Observe o gráfico que representa as alturas de cada uma das velas em função do tempo a partir do qual a vela A foi acesa.



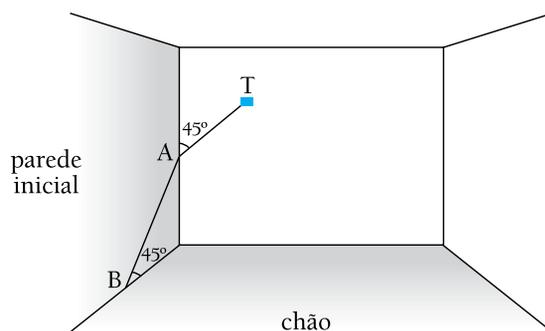
Calcule a altura de cada uma das velas antes de serem acesas.

Desenvolvimento e resposta:

06

Uma sala tem a forma de um paralelepípedo retângulo. Para levar fios a uma tomada T, um cano foi instalado tangente a duas paredes dessa sala. A primeira parte reta do cano, \overline{BA} , faz um ângulo de 45° com o chão e a segunda parte, \overline{AT} , congruente com a primeira, forma um ângulo de 45° com a parede inicial.

Observe a ilustração:



Desprezando a espessura do cano, calcule o ângulo \widehat{BAT} , formado por suas duas partes.

Desenvolvimento e resposta:

07

Para a realização de uma partida de futebol são necessários três árbitros: um juiz principal, que apita o jogo, e seus dois auxiliares, que ficam nas laterais. Suponha que esse trio de arbitragem seja escolhido aleatoriamente em um grupo composto de somente dez árbitros, sendo X um deles. Após essa escolha, um segundo sorteio aleatório é feito entre os três para determinar qual deles será o juiz principal.

Calcule a probabilidade de X ser o juiz principal.

Desenvolvimento e resposta:

08

Considere a matriz $A_{3 \times 3}$ abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1 & 1 \\ a_{31} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cada elemento desta matriz é expresso pela seguinte relação:

$$a_{ij} = 2 \times (\text{sen} \theta_i) \times (\text{cos} \theta_j) \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$$

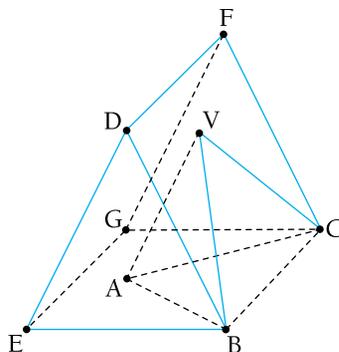
Nessa relação, os arcos θ_1 , θ_2 e θ_3 são positivos e menores que $\frac{\pi}{3}$ radianos.

Calcule o valor numérico do determinante da matriz A.

Desenvolvimento e resposta:

09

Um artesão retirou, de uma pedra com a forma inicial de um prisma triangular reto de base EBD , um tetraedro regular $VABC$. Observe a figura abaixo:



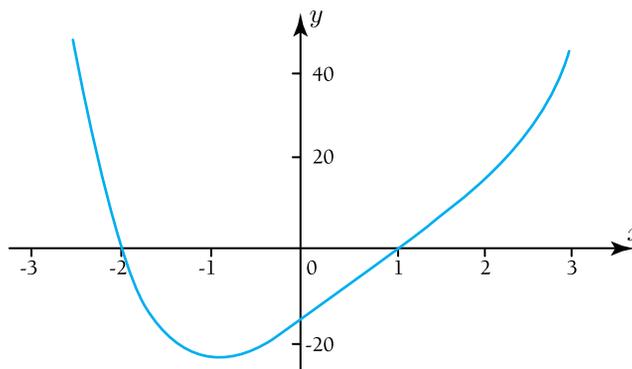
Considere os seguintes dados:

- os vértices A e V pertencem a duas faces laterais do prisma;
- $\overline{BD} = \overline{BE} = \overline{BC} = 1$ m.

Determine o volume inicial da pedra.

Desenvolvimento e resposta:

10



O gráfico acima representa uma função polinomial P de variável real, que possui duas raízes inteiras e é definida por:

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 16x + m$$

Determine o valor da constante representada por m e as quatro raízes desse polinômio.

Desenvolvimento e resposta:

